3 Matrizen und Lineare Gleichungssysteme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ab jetzt sei K ein Körper.

3.1 Lineare Gleichungssysteme

Definition: Ein System von Gleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ mit natürlichen Zahlen m und n, das heisst, ein Schema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

für gegebene $a_{ij}, b_i \in K$ und zu bestimmenden Variablen x_j, heisst *lineares Gleichungssystem* (kurz LGS) *über K*. Sind alle $b_i = 0$, so heisst das Gleichungssystem *homogen*.

Definition: *Elementare Zeilenumformungen* eines linearen Gleichungssystems sind:

(a) das Addieren von $\lambda \in K$ mal einer Zeile zu einer anderen,
(b) das Multiplizieren einer Zeile mit $\lambda \in K^{\times}$,
(c) das Vertauschen zweier Zeilen.

Fakt: Jede elementare Zeilenumformung ist umkehrbar, nämlich jeweils durch

(a) das Addieren von $-\lambda$ mal derselben Zeile zu derselben anderen,
(b) das Multiplizieren derselben Zeile mit λ^{-1},
(c) das nochmalige Vertauschen derselben Zeilen.

Für das Gleichungssystem insgesamt erhalten wir daher eine Äquivalenzumformung.

Bsp.: $K = \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

-1, -1

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -3y + 4z &= 0 \\ -2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$| \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ -3y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

-3

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

Also ist $z = -3$

$\Rightarrow y = z - 1 = -4$

$\Rightarrow x = 3z - y = -5$

Rückwärts-Einsetzen

Einzige Lösung $(x, y, z) = (-5, -4, -3)$

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

-1, 3

$$\begin{aligned} x + y &= -9 \\ -y &= 4 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} x &= -5 \\ -y &= 4 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

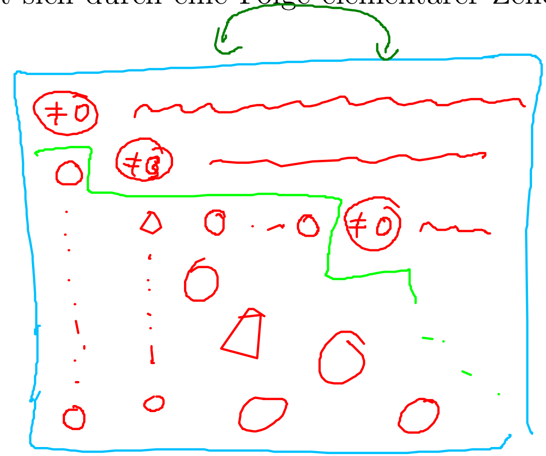
$| \cdot (-1)$

$\rightsquigarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= -4 \\ z &= -3 \end{aligned}}$$

Definition: Ein Gleichungssystem heisst *in Zeilenstufenform*, wenn die von Null verschiedenen Terme in jeder Zeile echt später beginnen als in der Zeile davor.

Satz: *(Gauss-Elimination)* Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch eine Folge elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.



Beweis:

(1) Erste Spalte ist Null ⇒ OK nach Induktion über n

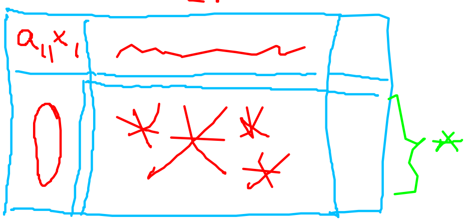
(2) Sonst wähle i mit $a_{i1} \neq 0$.

(3) Falls $i > 1$, vertausche Zeile $1, i$ ⇒ oBdA $a_{11} \neq 0$.

(4) Für jedes $i > 1$ addiere $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ mal die 1-te Zeile zur i-ten Zeile.

(5) Danach ist $a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$

D.h.:



(6) Induktion nach n: Kann annehmen, dass * in Zeilenstufenform bringen kann

(7) Dann ist das ganze LGS in Zeilenstufenform.

qed.

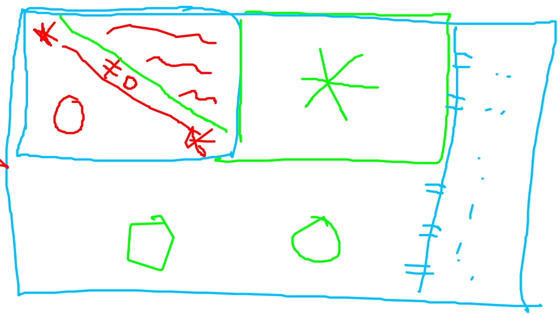
Satz: Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen und Vertauschen von Spalten (also Vertauschen von Variablen) in die folgende Form bringen für ein gewisses $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & a_{1,r+1}x_{r+1} & + \;\ldots\; + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & x_r & + & a_{r,r+1}x_{r+1} & + \;\ldots\; + & a_{rn}x_n & = & b_r \\
 & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Ist dann $b_j \neq 0$ für ein $j > r$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung. Andernfalls erhält man alle Lösungen, indem man die Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n \in K$ beliebig wählt und dann $x_i := b_i - a_{i,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n$ setzt für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

Lösungsmenge

$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{r+1}, \ldots, x_n \in K \text{ beliebig}, \\ \forall 1 \leq i \leq r: \\ x_i = b_i - a_{i,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n \end{array} \right\}$$



Bsp.:

$$\begin{array}{cccc|l} x+y+z & & & =3 & \\ & y-z+w & & =2 & \\ & & w & =1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} x+y+z & & & =3 & \\ & y-z & & =1 & -1 \\ & & w & =1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & +2z & & =2 \\ & y-z & & =1 \\ & & w & =1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & =2 \\ & y & -z & =1 \\ & & w & =1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $w = 1$

$y = z + 1$

$x = 2 - 2z$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge

$= \{ (2-2z, z+1, z, 1) \mid z \in K \}.$